

Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση Κολωνοπασσάλων Βάθρων Γεφυρών – Εφαρμογή στις Χαραδρογέφυρες Μετσόβου και στη Γέφυρα του Μετσοβίτικου Ποταμού

Ε. Σαπουντζάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών Ε.Μ.Π.
Α. Καμπίτσης, Υποψήφιος Διδάκτωρ Μηχανικός Ε.Μ.Π.
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών Ε.Μ.Π.
Α. Κορωναίου, Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η μη γραμμική δυναμική ανάλυση κολωνοπασσάλου τυχαίας διατομής διπλής συμμετρίας, μερικώς εδραζόμενου επί μη γραμμικού εδάφους προσομοιωμένου με μη γραμμικά ελατήρια τύπου Winkler, υποβαλλόμενου σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις και σε τυχούσες συνοριακές συνθήκες, λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας. Η δοκός υπόκειται σε συνδυασμένη δράση από τυχαίως κατανεμημένη ή συγκεντρωμένη εγκάρσια δυναμική φόρτιση και καμπτική ροπή κατά τις δυο διευθύνσεις καθώς και δυναμικό αξονικό φορτίο. Η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης. Μορφώνονται πέντε προβλήματα συνοριακών τιμών ως προς τις εγκάρσιες και αξονικές μετατοπίσεις καθώς και δύο τασικές συναρτήσεις, τα οποία λύνονται με τη μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης (Analog Equation Method), η οποία βασίζεται στην μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Η εφαρμογή της μεθόδου οδηγεί σε πεπλεγμένο σύστημα διαφορικών εξισώσεων κίνησης, του οποίου η επίλυση πραγματοποιείται με τη μέθοδο Μέσης Επιτάχυνσης (Average Acceleration Method) σε συνδυασμό με την τροποποιημένη μέθοδο Newton Raphson. Ο προσδιορισμός των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των προαναφερθέντων τασικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας μόνο συνοριακή ολοκλήρωση. Το προτεινόμενο μαθηματικό προσομοίωμα συνυπολογίζει τα πεπλεγμένα φαινόμενα των καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος της δοκού καθώς και τις αναπτυσσόμενες διατμητικές δυνάμεις από το αξονικό φορτίο. Το προτεινόμενο προσομοίωμα βρίσκει άμεση εφαρμογή στις χαραδρογέφυρες Μετσόβου και στη γέφυρα του Μετσοβίτικου ποταμού.

Εισαγωγή

Η θεμελίωση των κατασκευών δύναται να πραγματοποιηθεί με ποικίλους τρόπους. Στην περίπτωση όμως της κατασκευής φορέων γεφυροποιίας, ο πλέον διαδεδομένος τρόπος είναι η θεμελίωση με τη βοήθεια πασσάλων και τούτο διότι τα χαρακτηριστικά του εδάφους συχνά δεν επιτρέπουν την απευθείας έδραση είτε λόγω πρόσφατων εδαφικών αποθέσεων (περίπτωση γεφύρωσης ποταμών) είτε λόγω απαίτησης ανάληψης υψηλών κατακόρυφων φορτίων (περίπτωση χαραδρογεφυρών).

Οι χαραδρογέφυρες των τεχνικών έργων προσβάσεων της σήραγγας Μετσόβου (τμήμα από Ανθοχώρι μέχρι Δυτική Είσοδο σήραγγας Αηγιού), αλλά και η γέφυρα του Μετσοβίτικου ποταμού αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα γεφυρών, όπου ως φορείς θεμελίωσης χρησιμοποιούνται πάσσαλοι για την μεταφορά των φορτίων.

Η σπουδαιότητα ακριβούς ανάλυσης του φορέα της θεμελίωσης των γεφυρών αναδεικνύεται από το γεγονός ότι τα τεχνικά αυτά αποτελούν “γραμμές ζωής”. Αστοχία στη γέφυρα μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία μεταφοράς ανθρωπιστικού υλικού και μπορεί να θέσει σε κίνδυνο χιλιάδες ζωές εξαιτίας της αποκοπής της οδικής επικοινωνίας σε έκτακτη ανάγκη. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με την ανωδομή του έργου,

όπου οι βλάβες είναι εμφανείς και κατά συνέπεια διορθώσιμες, οι φορείς της θεμελίωσης ευρισκόμενοι εντός του εδάφους δεν προσφέρουν τη δυνατότητα επίβλεψης, συντήρησης και πόσο μάλλον αντικατάστασης, γεγονός που προβάλλει την απαίτηση για βέλτιστη και ρεαλιστική ανάλυση.

Κατά συνέπεια, ο προσδιορισμός της πραγματικής συμπεριφοράς των δοκών επί εδάφους επιβάλλει τη μελέτη των μη γραμμικών φαινομένων στην δυναμική ανάλυση των κατασκευών που όπως φαίνεται και από τα παραπάνω, είναι ιδιαίτερα ουσιώδης στις εφαρμογές Πολιτικού Μηχανικού, όπου η βελτιστοποίηση των διατομών τόσο σε επίπεδο υλικού όσο και γεωμετρίας (επίτευξη υψηλής δυσκαμψίας με οικονομία υλικού) είναι δέουσας σημασίας.

Η υπόθεση εφελκυστικών τάσεων κατά μήκος της δοκού στην επιφάνεια επαφής της με το υποκείμενο (ή περιβάλλον) έδαφος δεν αποτελεί ρεαλιστική παραδοχή όταν δεν υπάρχει συνδετικό υλικό ανάμεσα στους δύο φορείς. Οι περιοχές στις οποίες οι φορείς βρίσκονται σε επαφή και άρα το έδαφος και η δοκός αλληλεπιδρούν δεν είναι εξ' αρχής γνωστά καθώς αλλάζουν συναρτήσει του χρόνου και κατά συνέπεια ο προσδιορισμός της περιοχής επαφής αποτελεί μείζον θέμα. Επίσης, εξαιτίας της έντονης χρήσης υλικών με σχετικώς μεγάλο μέτρο διάτμησης και η ανάγκη για μέλη με μεγάλες ιδιοσυχνότητες το σφάλμα που προκύπτει αγνοώντας τα διατμητικά φαινόμενα μπορεί να είναι ουσιώδες, ειδικά σε περιπτώσεις μεγάλων εγκάρσιων φορτίσεων. Η θεωρία δοκού Timoshenko, η οποία περιλαμβάνει τα φαινόμενα αυτά καθώς και το φαινόμενο περιστροφικής αδρανείας υιοθετούνται στην παρούσα μελέτη.

Από την αναδρομή στην πρόσφατη σχετική βιβλιογραφία παρατηρείται ότι τα τελευταία χρόνια, η γραμμική στατική αλλά και δυναμική ανάλυση δοκού επί ελαστικού εδάφους έχει αποτελέσει αντικείμενο ιδιαίτερα εκτεταμένης έρευνας, με πρωτοποριακή μελέτη αυτή του (Hetenyi 1966), ο οποίος μελέτησε το πρόβλημα δοκού Bernoulli-Euler σε ελαστικό έδαφος Winkler. Ο Rades (1972) παρουσίασε τη μόνιμη απόκριση (steady-state) συμπαγούς δοκού εδραζόμενης σε έδαφος το οποίο προσδιορίζεται από τρεις ελαστικές παραμέτρους (δύο εγκάρσια και ένα διατμητικό ελατήριο) με θεώρηση πλήρους και ομαλής επαφής μεταξύ της δοκού και του εδάφους υποθέτοντας ασύζευκτες ιδιομορφές. Ο Stephens (1980) μελέτησε ελεύθερες ταλαντώσεις δοκού Timoshenko σε έδαφος τύπου Pasternak αναδεικνύοντας την επιρροή των φαινομένων περιστροφικής αδρανείας, των διατμητικών φαινομένων καθώς και της σταθεράς του εδάφους εφαρμόζοντας γενική αναλυτική λύση σε απλές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών. Οι De Rosa (1995) και El-Mously (1990) εξήγαγαν τη διατύπωση της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας πεπερασμένης δοκού Timoshenko εδραζόμενης σε ελαστικό έδαφος Pasternak. Ακριβείς εκφράσεις των ιδιοσυχνοτήτων και αναλυτικές σχέσεις για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού συστήματος διπλής δοκού διατυπώθηκαν από τους Zhang et. al. (2008). Επίσης, τόσο ημι-αναλυτικές κλειστές λύσεις όσο και αριθμητικές μέθοδοι όπως η μέθοδος δυναμοσειρών των εκφράσεων των μετατοπίσεων εφαρμόζοντας την αρχή του Hamilton, η μέθοδος Galerkin, η μέθοδος διαφορικών τετραγωνικών στοιχείων η οποία αποτελεί συνδυασμό της μόνιμης απόκρισης και της διαφορικής τετραγωνικής μεθόδου, οι διπλοί μετασχηματισμοί Fourier, και φυσικά η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων έχουν εφαρμοστεί στην επίλυση ταλαντώσεων και στην θεωρία ελαστικής ευστάθειας (λυγισμός) δοκών (ή πασσάλων) εδραζόμενων σε γραμμικό και μη γραμμικό ελαστικό έδαφος λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας τα φαινόμενα διατμητικών παραμορφώσεων.

Στις περιπτώσεις φορέων χαραδρογεφυρών δεν είναι λίγες οι φορές που υπό τα σεισμικά φορτία οι μετατοπίσεις των πασσάλων (πλήρως ή μερικώς περιβαλλόμενοι από έδαφος) γίνονται μεγάλες και η αναπτυσσόμενη γεωμετρική μη γραμμικότητα συντελεί στη δημιουργία φαινομένων τα οποία η γραμμική θεωρία δεν μπορεί να περιγράψει. Σε αντίθεση με την εκτεταμένη έρευνα η οποία έχει γίνει στον τομέα της γραμμικής δυναμικής ανάλυσης δοκού-πασσάλου επί ελαστικού εδάφους, ελάχιστα έχουν γίνει στο αντίστοιχο μη γραμμικό

πρόβλημα. Από την υπάρχουσα βιβλιογραφία, η μη γραμμική ελεύθερη ταλάντωση δοκού επί ελαστικών στηρίξεων έχει μελετηθεί από τον Lewandowski (1989) ο οποίος εφάρμοσε δυναμική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων αγνοώντας ωστόσο τις οριζόντιες δυνάμεις και τις δυνάμεις λόγω περιστροφικής αδράνειας, θεωρώντας τη δοκό ως σύστημα κατανεμημένης μάζας.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η μη γραμμική δυναμική ανάλυση κολωνοπασσάλου τυχαίας διατομής διπλής συμμετρίας, μερικώς εδραζόμενου επί μη γραμμικού εδάφους προσομοιωμένου με μη γραμμικά ελατήρια τύπου Winkler, υποβαλλόμενου σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις και σε τυχούσες συνοριακές συνθήκες, λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας. Η δοκός υπόκειται σε συνδυασμένη δράση από τυχαίως κατανεμημένη ή συγκεντρωμένη εγκάρσια δυναμική φόρτιση και καμπτική ροπή κατά τις δύο διευθύνσεις καθώς και δυναμικό αξονικό φορτίο. Η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης. Μορφώνονται πέντε προβλήματα συνοριακών τιμών ως προς τις εγκάρσιες και αξονικές μετατοπίσεις καθώς και δύο τασικές συναρτήσεις, τα οποία λύνονται με τη μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης (Analog Equation Method) (Katsikadelis 2002), η οποία βασίζεται στην μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (BEM). Η εφαρμογή της μεθόδου οδηγεί σε πεπλεγμένο σύστημα διαφορικών εξισώσεων κίνησης, του οποίου η επίλυση πραγματοποιείται με τη μέθοδο Μέσης Επιτάχυνσης (Average Acceleration Method) σε συνδυασμό με την τροποποιημένη μέθοδο Newton Raphson. Ο προσδιορισμός των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των προαναφερθέντων τασικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας μόνο συνοριακή ολοκλήρωση. Το προτεινόμενο μαθηματικό προσομοίωμα συνυπολογίζει τα πεπλεγμένα φαινόμενα των καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος της δοκού καθώς και τις αναπτυσσόμενες διατμητικές δυνάμεις από το αξονικό φορτίο.

Τα κύρια χαρακτηριστικά και τα πρωτότυπα στοιχεία της παρούσας έρευνας συγκριτικά με την υπάρχουσα βιβλιογραφία συνοψίζονται ως ακολούθως

- i. Τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας λαμβάνονται υπόψη στη μη γραμμική δυναμική ανάλυση κολωνοπασσάλου υποβαλλόμενου σε τυχαία φόρτιση (κατανεμημένο ή συγκεντρωμένο φορτίο και καμπτική ροπή κατά τις δύο εγκάρσιες διευθύνσεις καθώς και αξονικό φορτίο).
- ii. Ο ομογενής ελαστικός ημίχωρος προσομοιάζεται από μη γραμμικά (δεν είναι αποδεκτή εφελκυστική τάση-tensionless) ελατήρια τύπου Winkler.
- iii. Η δοκός στηρίζεται στις πλέον γενικές μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες περιλαμβανομένων και ελαστικών στηρίξεων ή δεσμεύσεων, ενώ η διατομή της δοκού είναι τυχαία και διπλά συμμετρική.
- iv. Το προτεινόμενο μαθηματικό προσομοίωμα συνυπολογίζει τα πεπλεγμένα φαινόμενα των καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος της δοκού καθώς και τις διατμητικές δυνάμεις αναπτυσσόμενες από το αξονικό φορτίο.
- v. Οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας ενεργειακή μέθοδο και όχι τις εκφράσεις που προτάθηκαν από τους Timoshenko και Cowper (1966), τις οποίες αρκετοί συγγραφείς έχουν χαρακτηρίσει ως μη ικανοποιητικές, ή εκφράσεις άλλων ερευνητών οι οποίες ενδέχεται να δώσουν αρνητικές τιμές.
- vi. Λαμβάνεται υπόψη ο λόγος Poisson ν του υλικού του κολωνοπασσάλου.
- vii. Η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόζει συνοριακή διακριτοποίηση του φορέα (BEM) καταλήγοντας σε γραμμικά ή παραβολικά στοιχεία αντί για επιφανειακά στα οποία θα κατέληγε η προσέγγιση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM), ενώ απαιτείται μικρός αριθμός στοιχείων για να επιτευχθεί ικανοποιητική ακρίβεια.

Το προτεινόμενο προσομοίωμα βρίσκει άμεση εφαρμογή στις χαραδρογέφυρες Μετσόβου και στη γέφυρα του Μετσοβίτικου ποταμού.

Διατύπωση του προβλήματος

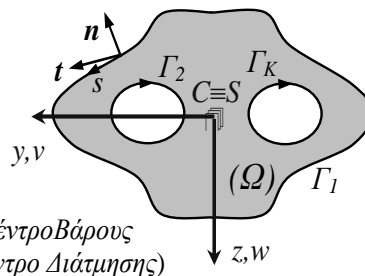
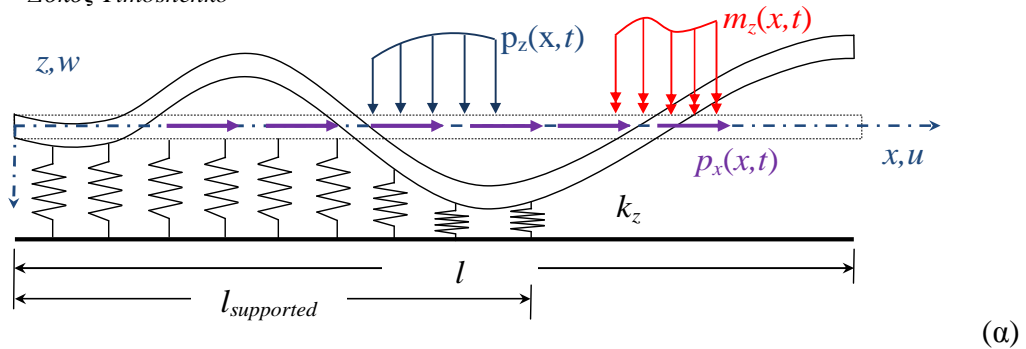
Θεωρούμε ευθύγραμμη δοκό μήκους l , σταθερής διατομής τυχούσας γεωμετρίας διπλής συμμετρίας εμβαδού A αποτελούμενης από ομογενές ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G , πυκνότητα ρ και λόγο Poisson ν , το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή Ω του επιπέδου $y-z$, ενώ τα σύνορα Γ_j ($j=1,2,\dots,K$) είναι τμηματικά λεία, δηλαδή μπορούν να περιλαμβάνουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών (Σχήμα 1). Επίσης σημειώνεται ότι, επειδή η διατομή είναι συμμετρική, το κύριο διατμητικό σύστημα ταυτίζεται με το αντίστοιχο κύριο καμπτικό σύστημα $C \equiv S$. Η δοκός θεωρείται μερικώς εδραζόμενη (ή περιβαλλόμενη) σε μη γραμμικό ομογενές ελαστικό έδαφος προσομοιωμένο με ελατήρια Winkler δυσκαμψίας k_x, k_y και k_z στις διευθύνσεις x, y, z , αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψη τη μη γραμμική επαφή μεταξύ της δοκού και των ελατηρίων, η εδαφική αντίδραση επί της δοκού ενεργεί μόνο σε περίπτωση συμπίεσης (θλίψεως) των ελατηρίων Winkler και δίδεται για τις τρεις διευθύνσεις από τις ακόλουθες εκφράσεις

$$p_{sx} = U_u(x)k_x u \quad p_{sy} = U_v(x)k_y v \quad p_{sz} = U_w(x)k_z w \quad (1\alpha, \beta, \gamma)$$

όπου $U_i(x)$ είναι μοναδιαίου βήματος συνάρτηση που ορίζεται ως

$$U_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } i < 0 \\ 1 & \text{if } i \geq 0 \end{cases} \quad i = u, v, w \quad (2)$$

Δοκός Timoshenko

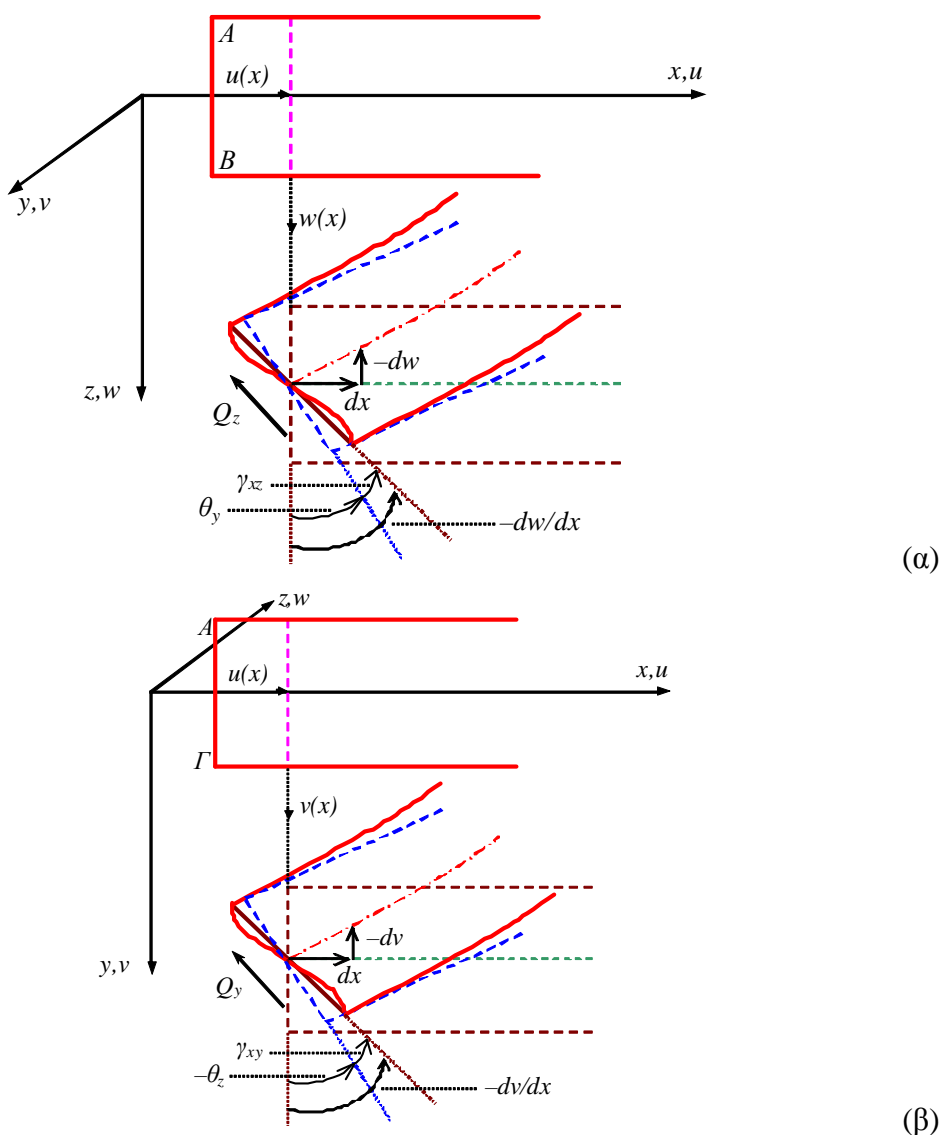


Σχήμα 1. Επίπεδο xz πρισματικής δοκού επί ελατηριωτού εδάφους υποβαλλόμενη σε αξονικό-εγκάρσιο δυναμικό φορτίο (α) με σταθερή διατομή τυχόντος σχήματος διπλής συμμετρίας (β)

Figure 1. xz plane of a prismatic beam-column in axial - flexural loading (α) with an arbitrary doubly symmetric cross-section occupying the two dimensional region Ω (β).

Η δοκός, υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή καταναμημένη δυναμική αξονική φόρτιση $p_x = p_x(x,t)$, εγκάρσια $p_y = p_y(x,t)$, $p_z = p_z(x,t)$ κατά τις y και z διευθύνσεις αντίστοιχα και καμπτική φόρτιση $m_y = m_y(x,t)$, $m_z = m_z(x,t)$ κατά μήκος των y και z αξόνων αντίστοιχα.

Για τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος υιοθετείται η Τεχνική Θεωρία κάμψεως Timoshenko. Η θεωρία Timoshenko, σε αντίθεση με τη θεωρία Euler–Bernoulli, λαμβάνει (έμμεσα) υπόψη την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων γ_{xy} και γ_{xz} στο έργο παραμόρφωσης της δοκού, θεωρώντας μέση τιμή των διατμητικών παραμορφώσεων με τη βοήθεια συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης. Αποτέλεσμα της παραδοχής αυτής είναι επίπεδες διατομές να εξακολουθούν να παραμένουν επίπεδες (πρώτη κινηματική παραδοχή) αλλά όχι πλέον κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα της δοκού (Σχήμα 2).



Σχήμα 2. Παραμορφωσιακά μεγέθη για κάμψη στο επίπεδο xz (α) και στο επίπεδο xy (β) διατμητικής ράβδου κατά Timoshenko

Figure 2. Displacements on the deformed element in the xz (α), xy (β) planes of a Timoshenko beam

Για την εξαγωγή και διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας και των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος επιστρατεύεται το ενεργειακό θεώρημα του W.R. Hamilton (1805-1865) το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε συνεχή όσο και διακριτά συστήματα. Η αρχή του Hamilton λαμβάνοντας υπόψη και δυναμικά φαινόμενα με χρήση της αρχής D'Alembert αποτελεί γενίκευση της αρχής της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Η αρχή του Hamilton μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K - W_{ext}) dt = 0 \quad (3)$$

όπου $\delta(\cdot)$ το πρώτο διαφορικό των περιεχόμενων ποσοτήτων, U η ενέργεια παραμορφώσεως της δοκού, K η κινητική ενέργεια της δοκού και W_{ext} η ενέργεια λόγω των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στη δοκό.

Τα εντατικά μεγέθη της δοκού λόγω των αναπτυσσόμενων τάσεων εκφράζονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$N = \int_{\Omega} S_{xx} d\Omega \quad M_y = \int_{\Omega} S_{xx} z d\Omega \quad M_z = - \int_{\Omega} S_{xx} y d\Omega \quad (4\alpha, \beta, \gamma)$$

$$Q_y = \int_{A_y} S_{xy} d\Omega \quad Q_z = \int_{A_z} S_{xz} d\Omega \quad (4\delta, \epsilon)$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (4α-ε) τις εκφράσεις των τάσεων προκύπτει

$$N = EA \left[u' + \frac{I}{2} (v'^2 + w'^2) \right] \quad M_y = EI_y \theta_y' \quad M_z = EI_z \theta_z' \quad (5\alpha, \beta, \gamma)$$

$$Q_y = GA_y \gamma_{xy} \quad Q_z = GA_z \gamma_{xz} \quad (5\delta, \epsilon)$$

όπου A το εμβαδόν της διατομής, I_y , I_z οι ροπές αδρανείας

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad (6)$$

$$I_y = \int_{\Omega} z^2 d\Omega \quad I_z = \int_{\Omega} y^2 d\Omega \quad (7\alpha, \beta)$$

EA είναι η αξονική αντίσταση, EI_y , EI_z οι καμπτικές αντιστάσεις, $GA_y = G(\kappa_y A) = GA/a_y$ και $GA_z = G(\kappa_z A) = GA/a_z$ οι διατμητικές αντιστάσεις της θεωρίας Timoshenko, κ_y , κ_z οι διατμητικοί διορθωτικοί συντελεστές και a_y , a_z οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης.

Κατά συνέπεια χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκφράσεις των εντατικών μεγεθών οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται

$$-EA(u'' + w'w'' + v'v'') + \rho A \ddot{u} + U_u k_x u = p_x \quad (8\alpha)$$

$$EI_z v'''' - \rho I_z \left(\frac{Ea_y}{G} + I \right) \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} + \rho A \dot{v} + \frac{EI_z}{GA_y} (Nv)'''' - (Nv)''' - \frac{\rho I_z}{GA_y} \left(\frac{\partial^2 (Nv)'}{\partial t^2} - \rho A \ddot{v} \right) \quad (8\beta)$$

$$+ \left(k_y v - \frac{EI_z}{GA_y} (k_y v'') + \frac{\rho I_z}{GA_y} k_y \dot{v} \right) U_v = p_y - \frac{EI_z}{GA_y} (p_y'') + \frac{\rho I_z}{GA_y} (\ddot{p}_y) - m_z'$$

$$EI_y w'''' - \rho I_y \left(\frac{Ea_z}{G} + I \right) \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \rho A \dot{w} + \frac{EI_y}{GA_z} (Nw)'''' - (Nw)''' - \frac{\rho I_y}{GA_z} \left(\frac{\partial^2 (Nw)'}{\partial t^2} - \rho A \ddot{w} \right) \quad (8\gamma)$$

$$+ \left(k_z w - \frac{EI_y}{GA_z} (k_z w'') + \frac{\rho I_y}{GA_z} k_z \dot{w} \right) U_w = p_z - \frac{EI_y}{GA_z} (p_z'') + \frac{\rho I_y}{GA_z} (\ddot{p}_z) + m_y'$$

Η πρώτη εξίσωση αποτελεί τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας στην αξονική ένταση ενώ οι (8β,γ) εκφράζουν τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στις εγκάρσιες διευθύνσεις της ράβδου Timoshenko μερικώς εδραζόμενης σε μη γραμμικό έδαφος προσομοιωμένο με ελατήρια Winkler, υποβαλλόμενη σε μη γραμμικές ταλαντώσεις εξαιτίας των συνδυασμένων δυναμικών αξονικών και εγκάρσιων φορτίων. Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις υποβάλλονται επιπρόσθετα στις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1^x u(x,t) + \alpha_2^x N(x,t) = \alpha_3^x \quad (9)$$

$$\alpha_1^y v(x,t) + \alpha_2^y V_y(x,t) = \alpha_3^y \quad \beta_1^y \theta_z(x,t) + \beta_2^y M_z(x,t) = \beta_3^y \quad (10\alpha,\beta)$$

$$\alpha_1^z w(x,t) + \alpha_2^z V_z(x,t) = \alpha_3^z \quad \beta_1^z \theta_y(x,t) + \beta_2^z M_y(x,t) = \beta_3^z \quad (11\alpha,\beta)$$

στα άκρα της δοκού $x=0,l$, ενώ παράλληλα ικανοποιούν τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = \bar{u}_0(x) \quad \dot{u}(x,0) = \dot{\bar{u}}_0(x) \quad (12\alpha,\beta)$$

$$v(x,0) = \bar{v}_0(x) \quad \dot{v}(x,0) = \dot{\bar{v}}_0(x) \quad (13\alpha,\beta)$$

$$w(x,0) = \bar{w}_0(x) \quad \dot{w}(x,0) = \dot{\bar{w}}_0(x) \quad (14\alpha,\beta)$$

όπου $\bar{u}_0(x)$, $\bar{v}_0(x)$, $\bar{w}_0(x)$, $\dot{\bar{u}}_0(x)$, $\dot{\bar{v}}_0(x)$ και $\dot{\bar{w}}_0(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις. Στις εξισώσεις (10) και (11) τα V_y , V_z και M_z , M_y είναι οι αντιδράσεις και οι καμπτικές ροπές στους άξονες y , z , αντίστοιχα, οι οποίες μαζί με τις γωνίες στροφής λόγω κάμψεως θ_y , θ_z δίδονται από τις ακόλουθες εκφράσεις

$$V_y = Nv' - EI_z v'''' - \frac{EI_z}{GA_y} \left[p_y' - U_v k_y v' + (Nv)'' - \rho A \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right] + \rho I_z \ddot{\theta}_z \quad (15\alpha)$$

$$V_z = Nw' - EI_y w'''' - \frac{EI_y}{GA_z} \left[p_z' - U_w k_z w' + (Nw)'' - \rho A \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right] - \rho I_y \ddot{\theta}_y \quad (15\beta)$$

$$M_z = EI_z v'' + \frac{EI_z}{GA_y} \left[p_y - U_v k_y v + (Nv)' - \rho A \dot{v} \right] \quad (15\gamma)$$

$$M_y = -EI_y w'' - \frac{EI_y}{GA_z} \left[p_z - U_w k_z w + (Nw')' - \rho A \ddot{w} \right] \quad (15\delta)$$

$$\theta_y = \frac{EI_y}{G^2 A_z^2} \left(\rho A \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - p_z' + U_w k_z w' - (Nw'')'' \right) - \frac{I}{GA_z} (EI_y w'''' + \rho I_y \ddot{\theta}_y + GA_z w') \quad (15\epsilon)$$

$$\theta_z = \frac{EI_z}{G^2 A_y^2} \left(p_y' - U_v k_y v' + (Nv'')'' - \rho A \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) + \frac{I}{GA_y} (EI_z v'''' - \rho I_z \ddot{\theta}_z + GA_y v') \quad (15\zeta)$$

Οι προαναφερθείσες εξισώσεις (9)-(11) αποτελούν τις πλέον γενικές μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες, οι οποίες μπορούν να περιγράψουν όλες τις γνωστές στηρίξεις περιλαμβανομένων και ελαστικών στηρίξεων ή δεσμεύσεων δίδοντας κατάλληλες τιμές στις συναρτήσεις $\alpha_k^x, \alpha_k^y, \alpha_k^z, \beta_k^y, \beta_k^z$ ($k=1,2,3$), οι οποίες αναφέρονται στα άκρα της δοκού $x=0,l$. Παραδείγματος χάριν, για να περιγραφεί η στήριξη πάκτωσης, οι παραπάνω συναρτήσεις – συντελεστές θα λάβουν τις ακόλουθες τιμές $\alpha_j^x = \alpha_j^y = \alpha_j^z = 1$ και $\beta_j^y = \beta_j^z = 1$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι ίσοι με το μηδέν.

Στις παραπάνω εκφράσεις οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης a_z, a_y μορφώνονται σύμφωνα με την ενεργειακή μέθοδο και υπολογίζονται αριθμητικά με τη βοήθεια της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων, όπως παρουσιάζεται από τους Sapountzakis and Mokos (2005) ενώ εάν επιθυμείται να αγνοηθούν τα φαινόμενα διατμητικών παραμορφώσεων αρκεί να τεθούν οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης $a_z = a_y = 0$.

Το προτεινόμενο προσομοίωμα βρίσκει άμεση εφαρμογή στις χαραδρογέφυρες Μετσόβου και στη γέφυρα του Μετσοβίτικου ποταμού. Έτσι, στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται η οριζόντια και η κατά μήκος τομή της γέφυρας του Μετσοβίτικου ποταμού, όπου φαίνονται οι μήκους $l = 10m$ και διαμέτρου $D = 1.2m$ πάσσαλοι.

Αριθμητική επίλυση

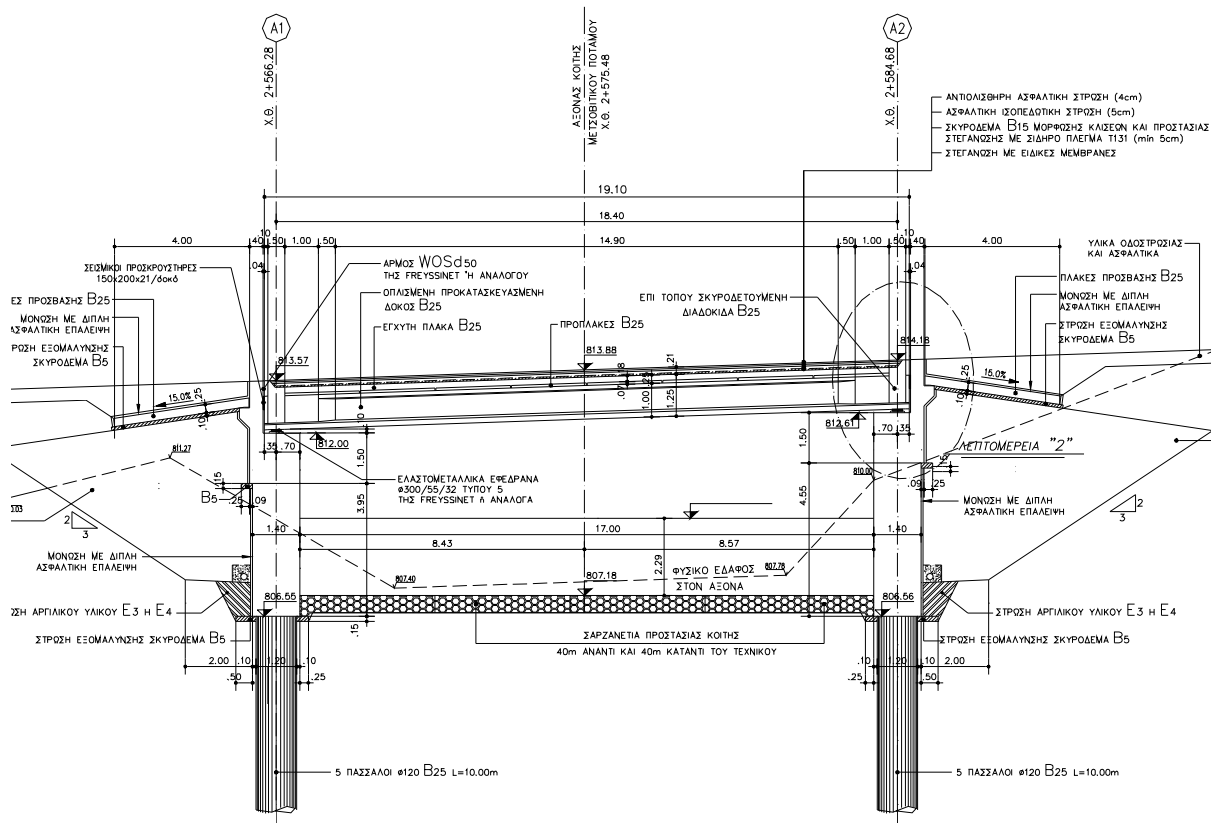
Η επίλυση του προβλήματος της μη γραμμικής καμπτικής δυναμικής ανάλυσης δοκού Timoshenko μερικώς εδραζόμενης επί μη γραμμικού εδάφους Winkler έγκειται στον προσδιορισμό της διαμήκους μετατόπισης $u(x,t)$ και των εγκάρσιων μετατοπίσεων $v(x,t)$ και $w(x,t)$, οι οποίες περιγράφονται από τις εξισώσεις (8)-(11) και επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης όπως περιγράφεται στις εργασίες (Katsikadelis 2002), (Sapountzakis and Katsikadelis 2000), (Sapountzakis and Dourakopoulos 2009).

Αριθμητικά παραδείγματα

Με βάση την ανάλυση που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια συντάχθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή και επιλύθηκαν προς χάριν γενικότητας παραδείγματα μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης δοκού (πασσάλου) Timoshenko μερικώς εδραζόμενης επί μη γραμμικού εδάφους τύπου Winkler, προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και το εύρος εφαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου.

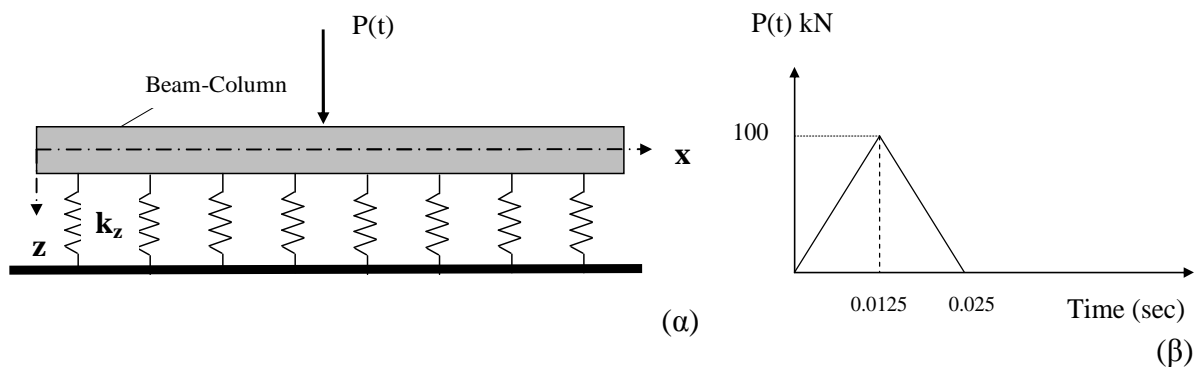
Σε όλα τα παραδείγματα εφαρμόστηκε η ίδια διακριτοποίηση (41 συνοριακών στοιχείων) ενώ το χρονικό βήμα ορίστηκε ως $\Delta t = 1.0 \mu sec$. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, παρουσιάζει μηδαμινή διαφορά αν πυκνωθεί το δίκτυο των στοιχείων δηλαδή η απαιτούμενη ακρίβεια επιτυγχάνεται με σχετικά μικρό πλήθος στοιχείων.

Παράδειγμα 1



Σχήμα 3. Οριζόντια και κατά μήκος τομή της γέφυρας του Μετσοβίτικου ποταμού
Figure 3. Horizontal and longitudinal section of Metsovitikos River Bridge

Εν συνεχεία, μελετήθηκαν εξαναγκασμένες γραμμικές ταλαντώσεις της ίδιας δοκού υποβαλλόμενης σε δυναμικό τριγωνικό συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσο της με μέγιστη τιμή $P_{1/2} = 100 \text{ kN}$ όπως αυτό παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4. Πρισματική δοκός επί ελαστικού εδάφους (α) υποβαλλόμενη σε δυναμικό τριγωνικό φορτίο (β)
Figure 4. Prismatic beam-column on elastic foundation (α) subjected to a triangular impulsive load (β).

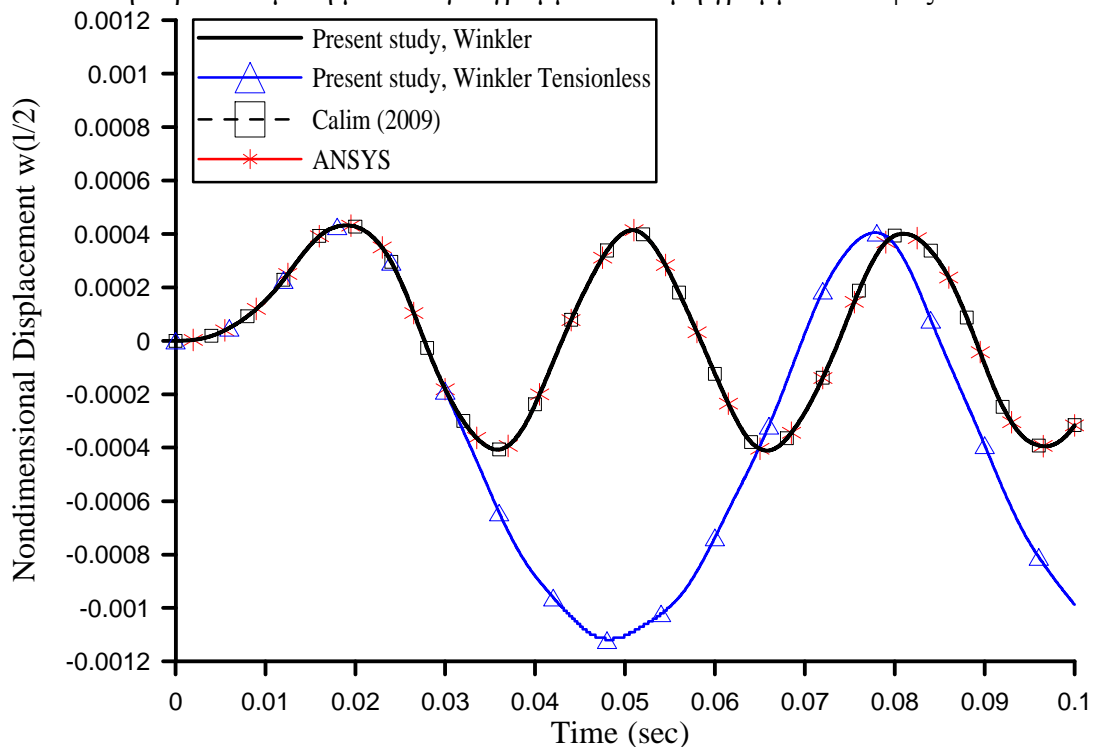
Η ίδια περίπτωση έχει ερευνηθεί από τον Calim (2009) και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα παρακάτω συγκριτικά διαγράμματα. Στο Σχήμα 5 παρουσιάζεται η χρονιοιστορία της

εγκάρσια μετατόπισης του μεσαίου σημείου της δοκού $w(l/2)$ και συγκρίνεται με τα αποτελέσματα του Calim (2009) καθώς και αυτά που έδωσε η ανάλυση με το πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων (ANSYS). Παρατηρείται πλήρης ταύτιση των καμπυλών. Στο ίδιο διάγραμμα παρουσιάζονται επιπροσθέτως, τα αποτελέσματα που ελήφθησαν από την παρούσα μέθοδο για μη γραμμικό έδαφος (tensionless) καταδεικνύοντας το μέγεθος των διαφορών μεταξύ των παραδοχών και τη σημασία της μη γραμμικότητας του εδάφους.

Πίνακας 1. Πέντε πρώτες φυσικές συχνότητες (Hz) της αμφιέριστης δοκού της Εφαρμογής 1
Table 1. First five natural frequencies (Hz) of the simply supported beam of example 1

Modes	Timosh. <i>et al.</i> (1974)	Lai <i>et al</i> (1992)	Thambiratnam & Zhuge (1996)	Friswell <i>et al.</i> (2007)	Calim (2009)	ANSYS (2009)	Παρούσα ερευνα
1	32.9032	32.9049	32.9033	32.8980	32.8633	32.8624	32.7946
2	56.8135	56.8220	56.8193	56.8080	56.5972	56.5891	56.5476
3	112.908	111.973	111.961	111.900	110.759	110.739	110.722
4	-	-	-	193.760	189.939	189.901	189.489
5	-	-	-	-	222.078	222.043	222.077

Στα Σχήματα 6, 7 παρουσιάζονται η χρονοϊστορία της καμπτικής ροπής $M_y(l/2)$ στο μέσο της δοκού και της διατμητικής δύναμης $Q_z(l)$ στο στηριζόμενο άκρο, αντίστοιχα. Ομοίως, στα διαγράμματα υπάρχουν οι καμπύλες που παρουσιάστηκαν από τον Calim (2009), ANSYS και την προτεινόμενη μέθοδο για γραμμικό και μη γραμμικό έδαφος.



Σχήμα 5. Χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης του μεσαίου σημείου $w(l/2)$ της δοκού της Εφαρμογής 1

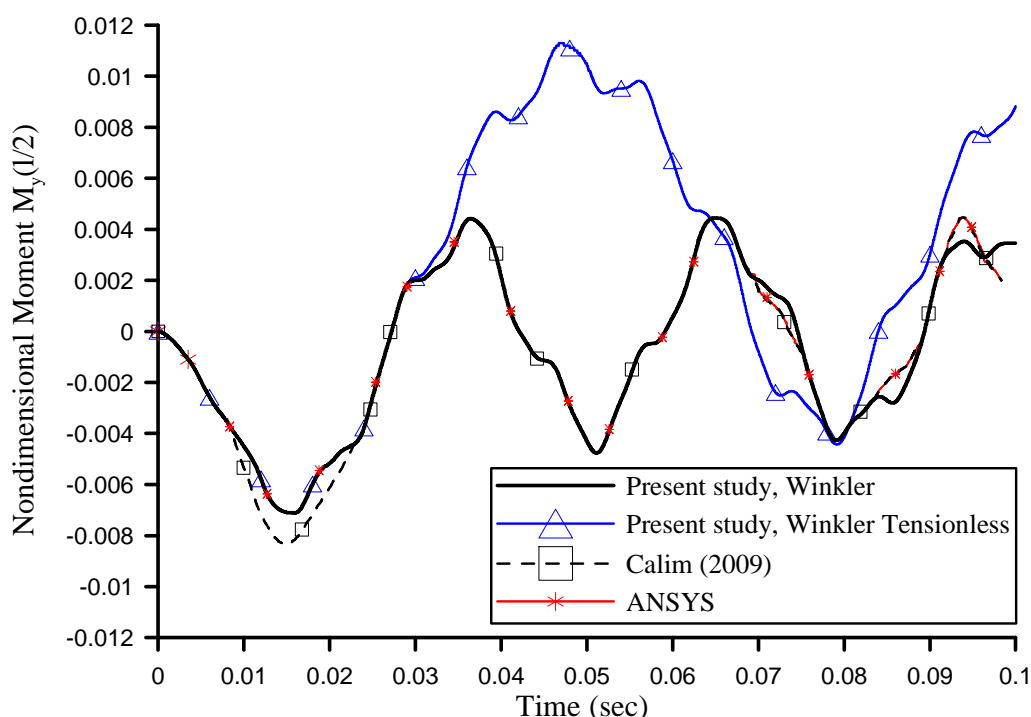
Figure 5. Time history of the transverse displacement $w(l/2)$ at the midpoint of the beam-column of example 1

Τέλος, συντάχθηκε ο Πίνακας 2 στον οποίο γίνεται η σύγκριση των ακραίων μετατοπίσεων του μέσου της δοκού και της εδαφικής αντίδρασης επί της δοκού κάνοντας εμφανή για άλλη μια φορά τη σημασία της πιο ρεαλιστικής παραδοχής των μη γραμμικών ελατήριων Winkler. Τονίζεται ότι ενώ οι μέγιστες θετικές μετατοπίσεις (θέτουν θλιπτικές τάσεις στο υποκείμενο έδαφος) παραμένουν σταθερές κατά τις δυο αναλύσεις, γραμμικού και μη γραμμικού εδάφους, οι αρνητικές μετατοπίσεις (θέτουν εφελκυστικές τάσεις στο υποκείμενο έδαφος) διαφέρουν. Στην παραδοχή μη γραμμικών ελατηρίων, η μέγιστη αρνητική μετατόπιση είναι υπερδιπλάσια της αντίστοιχης για γραμμικά ελατήρια Winkler κάτι που και πρακτικά μπορεί κανείς να αντιληφθεί. Σημειώνεται σε αυτό το σημείο, ότι η μέγιστη εδαφική αντίδραση στο μέσο της δοκού είναι περίπου το 40% του μεγίστου του φορτίου.

Πίνακας 2. Ακραίες τιμές μετατοπίσεων $w(l/2)$ και η εδαφική αντίδραση $p_{sz}(l/2)$ επί της δοκού της Εφαρμογής 1

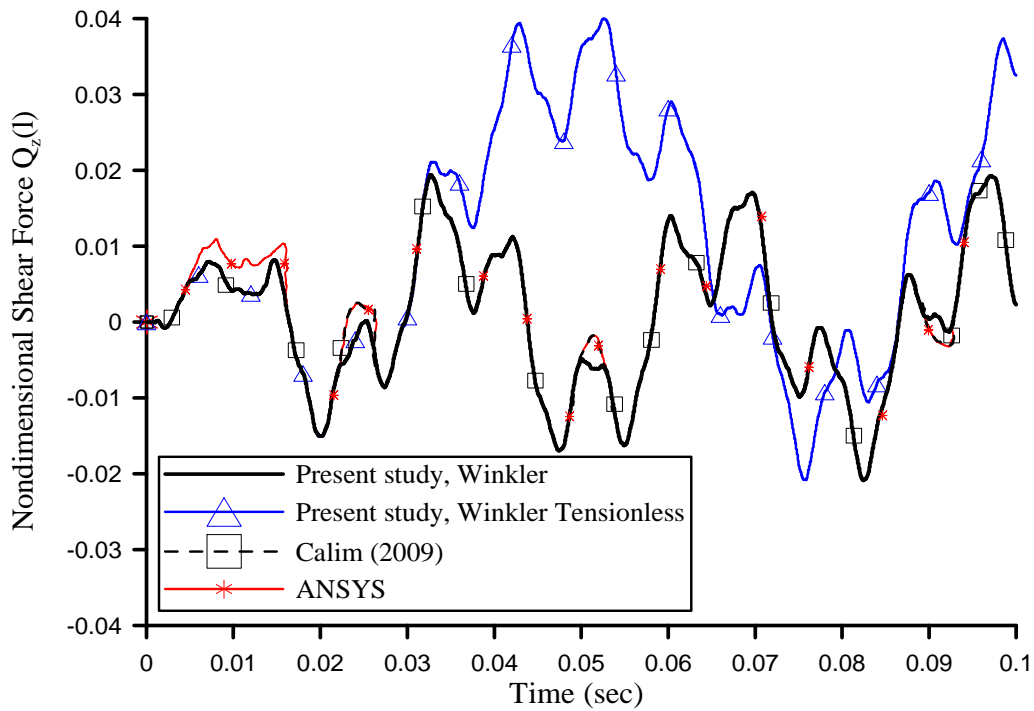
Table 2. Extreme values of the displacement $w(l/2)$ and the foundation reaction $p_{sz}(l/2)$ of the beam-column of example 1

	Winkler		Winkler Tensionless	
	$w(l/2)$ (m)	$p_{sz}(l/2)$ (kN)	$w(l/2)$ (m)	$p_{sz}(l/2)$ (kN)
Max	$2.63 \cdot 10^{-3}$	43.6	$2.63 \cdot 10^{-3}$	43.6
Min	$-2.50 \cdot 10^{-3}$	-41.5	$-6.80 \cdot 10^{-3}$	0.00



Σχήμα 6. Χρονοϊστορία της καμπτικής ροπής του μεσαίου σημείου $M_y(l/2)$ της δοκού της Εφαρμογής 1

Figure 6. Time history of the bending moment $M_y(l/2)$ at the midpoint of the beam-column of example 1

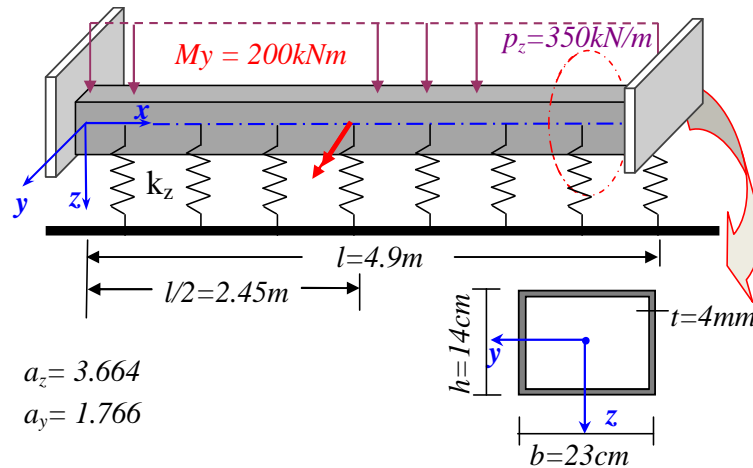


Σχήμα 7. Χρονοϊστορία της διατμητικής δύναμης στο άκρο $Q_z(l)$ της δοκού της Εφαρμογής 1

Figure 7. Time history of the shear force $Q_z(l)$ at the right supported end of the beam-column of example 1.

Παράδειγμα 2

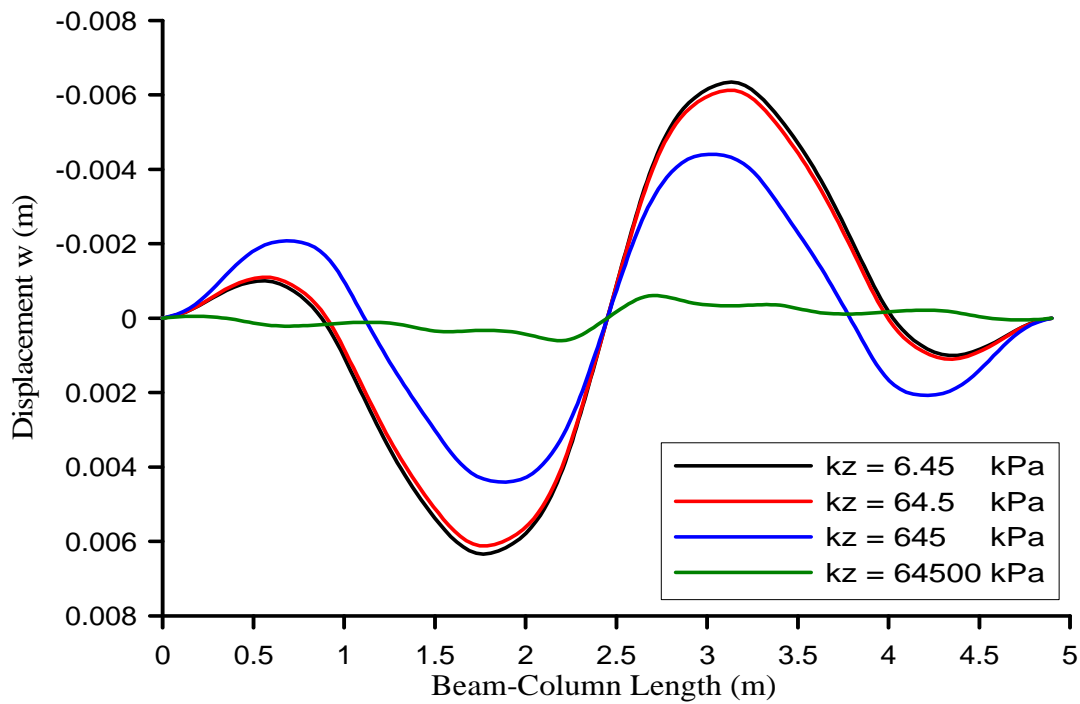
Προκειμένου να γίνει εμφανής η σημασία της μη γραμμικής ανάλυσης και της επιρροής των φαινομένων διατμητικής παραμόρφωσης στις καμπτικές ταλαντώσεις, ως δεύτερη εφαρμογή μελετήθηκε αμφίπακτη δοκός μήκους $l=4.90m$ λεπτότοιχης κοίλης ορθογωνικής διατομής ($E=2.1 \times 10^8 kPa$, $\nu=0.3$, $\rho=7.85 tn/m^3$) εδραζόμενη σε ομογενές έδαφος προσομοιωμένο είτε με γραμμικά είτε με μη γραμμικά ελατήρια Winkler δυσκαμψίας k_z , όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8. Αμφίπακτη δοκός λεπτότοιχης κοίλης ορθογωνικής διατομής υποβαλλόμενη σε συγκεντρωμένη ροπή M_y και ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο p_z

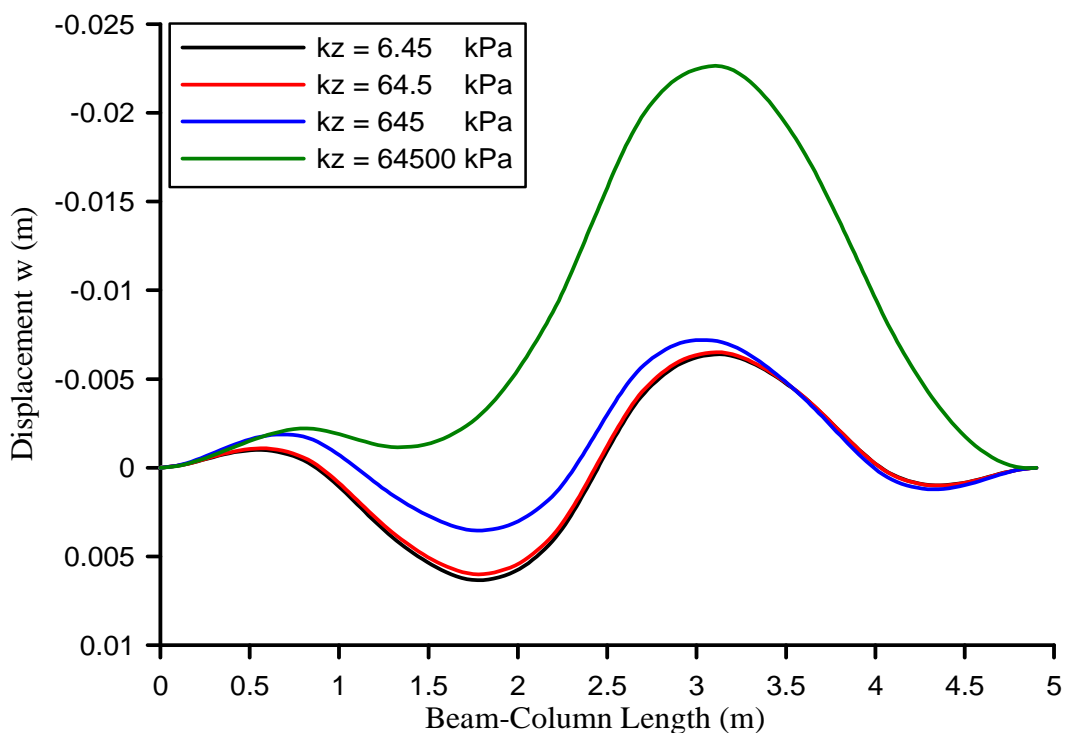
Figure 8. Clamped beam of hollow rectangular cross section subjected to the suddenly applied concentrated bending moment M_y and uniformly distributed load p_z

Η δοκός υποβάλλεται σε συγκεντρωμένη ροπή στο μέσον της, η οποία επιβάλλεται αιφνίδια και παραμένει στη συνέχεια με σταθερή τιμή $M_y = 200 \text{ kNm}$ σε όλη τη διάρκεια της κίνησης. Τα αποτελέσματα που εξήχθησαν παρουσιάζονται στα ακόλουθα διαγράμματα. Στα Σχήματα 9,10 παρουσιάζεται η παραμορφωμένη κατάσταση (στιγμιότυπο) κατά τη διεύθυνση του άξονα z της δοκού την χρονική στιγμή $t = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ sec}$ για διαφορές τιμές της εδαφικής δυσκαμψίας k_z στις περιπτώσεις γραμμικών και μη γραμμικών ελατηρίων Winkler αναδεικνύοντας τη σημασία της εδαφικής σταθεράς στις αναλύσεις κατασκευών καθώς και τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στις δύο παραδοχές. Παράλληλα με το προαναφερθέν φορτίο, η δοκός υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο $p_z = 350 \text{ kN/m}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 8. Στο Σχήμα 11 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης του μεσαίου σημείου της δοκού $w(l/2)$ για μη γραμμικό έδαφος σταθερής δυσκαμψίας $k_z = 645.0 \text{ kPa}$, η οποία μελετήθηκε με γραμμική και μη γραμμική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας αντίστοιχα. Από τα αποτελέσματα, παρατηρείται αξιοσημείωτη διαφορά μεταξύ της γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης, η οποία δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα καθώς και η σημαντική συνεισφορά των διατμητικών φαινομένων, τα οποία αυξάνουν τόσο τις εγκάρσιες μετατοπίσεις όσο και τις περιόδους του πρώτου κύκλου κίνησης της δοκού και δεν πρέπει να αγνοούνται σε όμοιες περιπτώσεις.



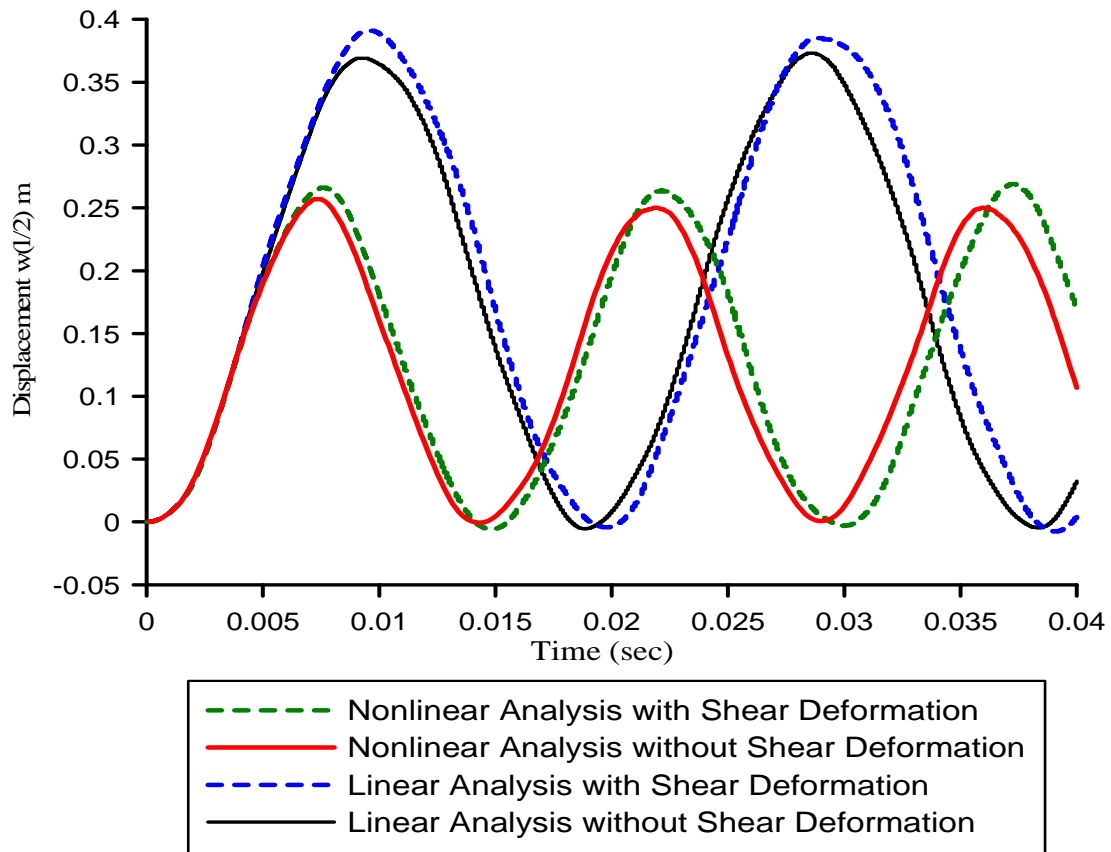
Σχήμα 9. Παραμόρφωση w κατά μήκος της δοκού της Εφαρμογής 2, για διάφορες τιμές k_z των ελατηρίων Winkler

Figure 9. Deflection w along the beam-column of example 2, for various stiffness k_z values of the bilateral Winkler springs



Σχήμα 10. Παραμόρφωση w κατά μήκος της δοκού της Εφαρμογής 2, για διαφορετικές τιμές k_z των μη γραμμικών ελατηρίων Winkler

Figure 10. Deflection w along the beam-column of example 2, for various stiffness k_z values of the unilateral Winkler springs



Σχήμα 11. Χρονοϊστορία της μετατόπισης του μεσαίου σημείου $w(l/2)$ της δοκού της Εφαρμογής 2, για μη γραμμικό έδαφος δυσκαμψίας $k_z = 645.0 \text{ kPa}$

Figure 11. Time history of the central deflection $w(l/2)$ of the beam-column of example 2, for a unilateral subgrade model with $k_z = 645.0 \text{ kPa}$

Πίνακας 3. Μέγιστες τιμές μετατοπίσεων $w_{max} (m)$ και περίοδοι $T_z (sec)$ του πρώτου κύκλου κίνησης της αμφίπακτης δοκού της Εφαρμογής 2

Table 3. Maximum central deflection $w_{max} (m)$ and period $T_z (sec)$ of the first cycle of motion of the clamped beam of example 2.

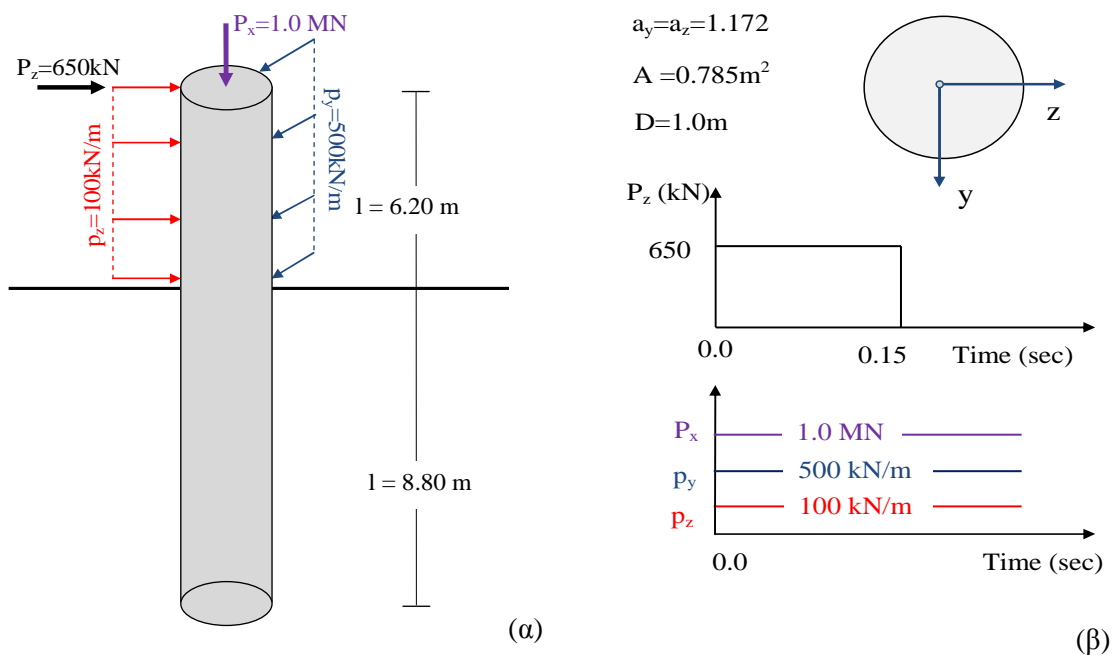
	Χωρίς Διατμητικές Παραμορφώσεις		Με Διατμητικές Παραμορφώσεις	
	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση
w_{max}	0.3729	0.2572	0.3914	0.2688
T_z	0.01890	0.01482	0.01973	0.01607

Εξάγεται λοιπόν από τα προηγούμενα το συμπέρασμα ότι η παρουσία των διατμητικών φαινομένων μπορεί να είναι καταλυτικής σημασίας στη διαμόρφωση των αποτελεσμάτων ιδιαίτερα στις περιπτώσεις εκείνες όπου η κάμψη που καταπονεί την κατασκευή είναι συγκρίσιμη με το φαινόμενο της διάτμησης, κάτι που συμβαίνει σε δοκούς μικρού

ανοίγματος και διατομών με αξιόλογους συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης. Ακόμα, για καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων συντάχθηκε ο Πίνακας 3, ο οποίος περιγράφει τη διαφορά που παρατηρείται μεταξύ της γραμμικής θεωρίας και της θεωρίας δευτέρας τάξεως καθώς και της επιρροής των διατμητικών φαινομένων στη μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση $w_{max}(m)$ και την περίοδο $T_z(sec)$ του πρώτου κύκλου κίνησης της δοκού.

Παράδειγμα 3

Προκειμένου να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου καθώς και το εύρος των εφαρμογών που είναι σε θέση να καλύψει, ως τρίτη εφαρμογή μελετήθηκε μερικώς εμπηγνύμενος πάσσαλος σε ομογενές ελαστικό έδαφος με σταθερά ελατηρίων $k_z = k_y = 85.0 \text{ MN/m}^2$, συνολικού μήκους $l = 15.0 \text{ m}$ ($l_{free} = 6.20 \text{ m}$, $l_{embed} = 8.80 \text{ m}$), κυκλικής διατομής διαμέτρου $D = 1.0 \text{ m}$. Το υλικό του πασσάλου θεωρείται οπλισμένο σκυρόδεμα με μέτρο ελαστικότητας $E = 29 \text{ GPa}$, λόγο Poisson $\nu = 0.2$ ενώ τα χαρακτηριστικά της διατομής ($A = 0.785 \text{ m}^2$, $I_y = I_z = 0.049 \text{ m}^4$, $a_y = a_z = 1,172$) παρουσιάζονται στο Σχήμα 12(β). Αναφορικά με τις συνθήκες στήριξης του πασσάλου, στο εμπηγνύμενο άκρο θεωρείται πακτωμένος ενώ στο ελεύθερο άκρο θεωρείται ελεύθερη η κίνηση σε όλες τις μετατοπίσεις ενώ έχουν δεσμευτεί όλες οι στροφές. Οι παραπάνω συνθήκες στήριξης έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον ενώ εάν το μήκος του πασσάλου είναι μεγαλύτερο από το ενεργό μήκος του, τότε μικρή σημασία έχουν οι συνθήκες στηρίξεις στο εμπηγνύμενο άκρο.

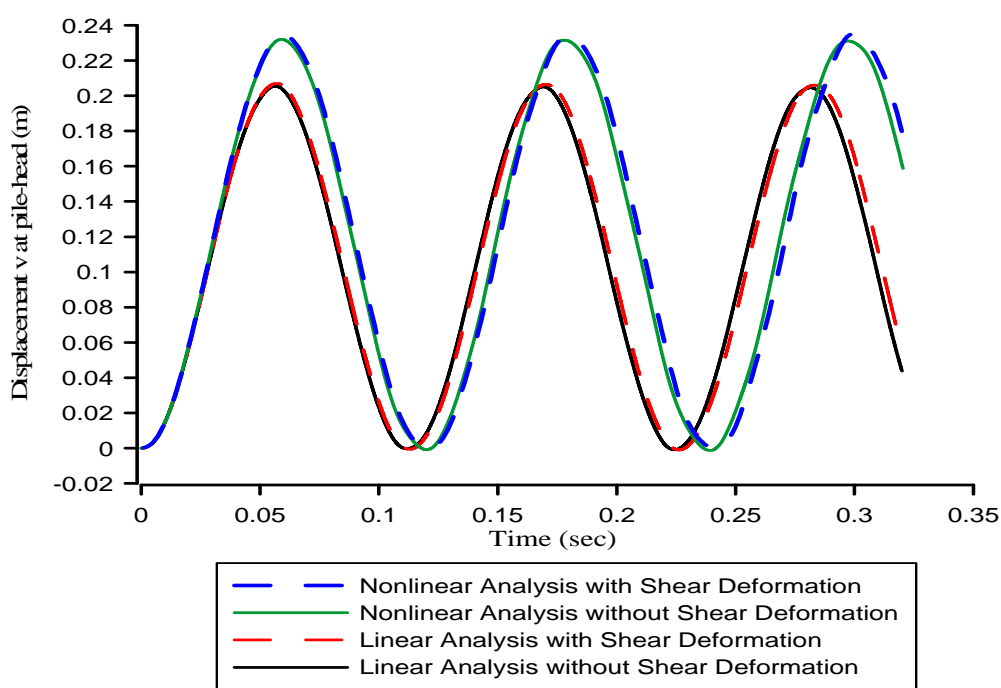


Σχήμα 12. Πάσσαλος κυκλικής διατομής σε αξονική-καμπτική φόρτιση υποβαλλόμενος σε συγκεντρωμένο τετραγωνικό πλήγμα P_z , συγκεντρωμένη αξονική δύναμη P_x και ομοιόμορφα κατανεμημένα εγκάρσια φόρτια p_y , p_z

Figure 12. Pile of circular cross section in axial - flexural loading subjected to rectangular impulsive concentrated load P_z , concentrated axial load P_x and to uniformly distributed loading p_y , p_z

Ο πάσσαλος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο στην κορυφή του με τιμή $P_x(0,t)=1.0MN$, ($t \geq 0.0$) και σε ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο δυναμικό φορτίο $p_y(t)=500kN/m$, ($t \geq 0.0$), το οποίο ενεργεί επί του ελευθέρου τμήματος του πασσάλου όπως φαίνεται Σχήμα 12(α).

Αφού πραγματοποιήθηκαν όλες οι δυνατές αναλύσεις (γραμμική και μη γραμμική λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας αντίστοιχα τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας) τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 13, όπου γίνεται εμφανής η μεγάλη σημασία της μη γραμμικής ανάλυσης στη χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης της κεφαλής του πασσάλου v_{top} ενώ αντιθέτως στην προκειμένη περίπτωση λόγω της διατομής (η οποία έχει μικρούς διατμητικούς συντελεστές) καθώς και του μήκους (το οποίο είναι αρκετά μεγάλο) τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης είναι αμελητέα και θα μπορούσαν με ασφάλεια να αγνοηθούν. Τα ίδια συμπεράσματα εξάγονται και από το Σχήμα 14 το οποίο παριστά τη μετατόπιση v του πασσάλου τη χρονική στιγμή $t=7.0 \cdot 10^{-2} sec$ (στιγμιότυπο). Επιπροσθέτως συντάχθηκε ο Πίνακας 4 στον οποίο παρουσιάζονται οι μέγιστες μετατοπίσεις της κεφαλής του πασσάλου $(v_{top})_{max}$ εξαιτίας του προαναφερθέντος φορτίου, καθώς και οι περίοδοι του πρώτου κύκλου κίνησης. Ομοίως με της προηγούμενες εφαρμογές, παρατηρείται αύξηση (έστω και ελαχίστη στην παρούσα εφαρμογή για λόγους που διευκρινιστήκαν παραπάνω) των μετατοπίσεων και των περιόδων κίνησης του πασσάλου λόγω των διατμητικών φαινομένων.



Σχήμα 13. Χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης v_{top} της κεφαλής του εξεταζόμενου πασσάλου της Εφαρμογής 3

Figure 13. Time history of the transverse displacement v_{top} of the head of the pile of example 3

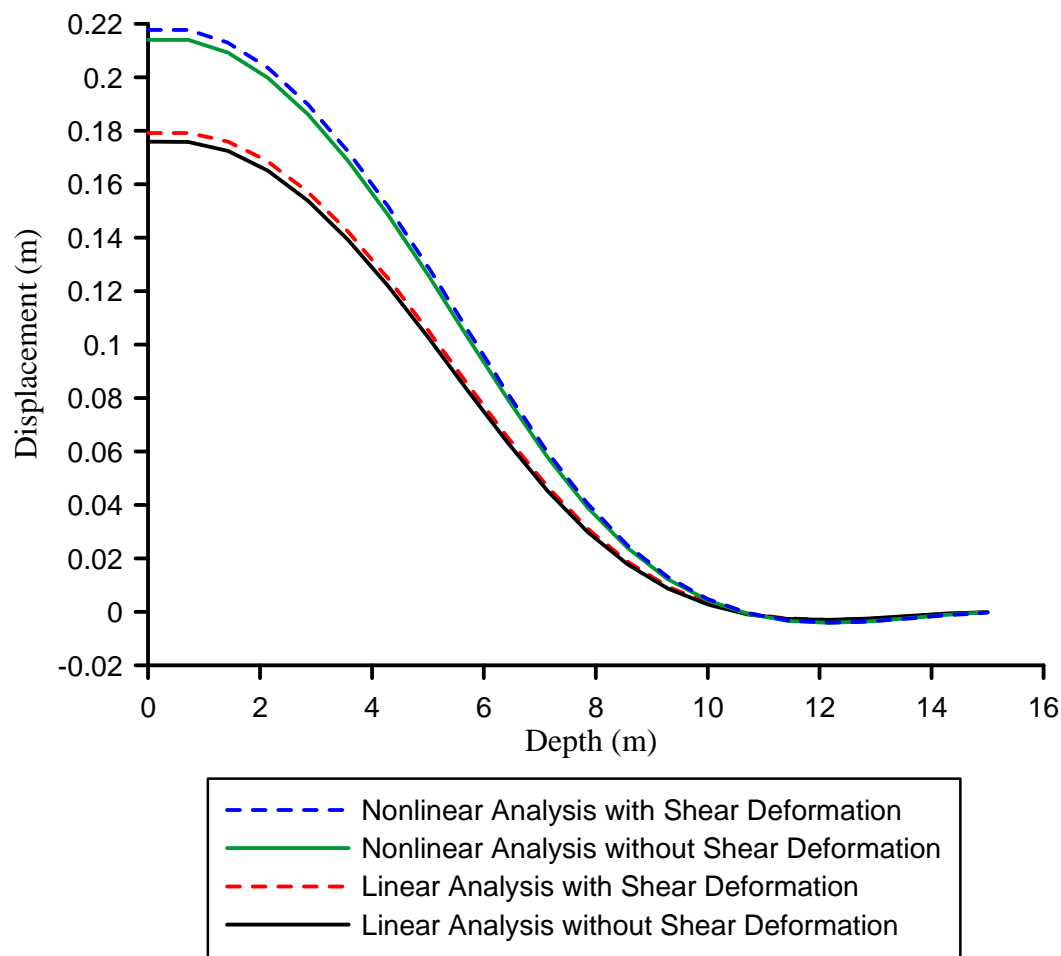
Το ίδιο σύστημα πασσάλου-εδάφους, καταπονείται με επιπρόσθετη φόρτιση στο ελεύθερο άκρο του πασσάλου με συγκεντρωμένο φορτίο $P_z(t)$, το οποίο επιβάλλεται αιφνίδια και παραμένει στη συνέχεια με σταθερή τιμή ίση με $P_z = 650kN$ για το χρονικό διάστημα $(0.0 \leq t \leq 0.15)$ (ορθογωνικό πλήγμα), καθώς και σε ομοιόμορφα κατανεμημένο εγκάρσιο δυναμικό φορτίο $p_z = 100 kN/m$ στο ελεύθερο τμήμα του πασσάλου όπως φαίνεται στο Σχήμα 12(α),(β).

Πίνακας 4. Μέγιστες μετατοπίσεις της κεφαλής του πασσάλου $(v_{top})_{max}$ και περίοδοι T_y (sec) του πρώτου κύκλου κίνησης της Εφαρμογής 3

Table 4. Maximum head deflection $(v_{top})_{max}$ and period T_y (sec) of the first cycle of motion of the pile of example 3

	Χωρίς Διατμητικές Παραμορφώσεις		Με Διατμητικές Παραμορφώσεις	
	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση
$(v_{top})_{max}$	0.2054	0.2321	0.2070	0.2351
T_y	0.1105	0.1180	0.1111	0.1201

Στο Σχήμα 15 δίδεται η χρονική απόκριση της εγκάρσιας μετατόπισης της κεφαλής του πασσάλου w_{top} πραγματοποιώντας είτε γραμμική είτε μη γραμμική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψη ή αγνοώντας τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και την περιστροφική αδράνεια. Όμοια με τη διεύθυνση y , στη διεύθυνση z η θεωρία Timoshenko δεν δίνει αξιοσημείωτες διαφορές και θα μπορούσε να αγνοηθεί χωρίς κανένα πρακτικό σφάλμα. Τέλος, συντάχθηκε ο Πίνακας 5, στον οποίο παρουσιάζονται οι μέγιστες μετατοπίσεις της κεφαλής του πασσάλου κατά τις εγκάρσιες διευθύνσεις $(v_{top})_{max}$, $(w_{top})_{max}$ και οι περίοδοι T_y, T_z (ms) του πρώτου κύκλου κίνησης, για τις ίδιες περιπτώσεις ανάλυσης όπου πάλι παρατηρείται αύξηση των μετατοπίσεων και των περιόδων εξαιτίας των διατμητικών φαινομένων και φυσικά σημαντική απόκλιση μεταξύ της γραμμικής και της μη γραμμικής ανάλυσης όπως ήταν αναμενόμενο σε στοιχείο με τέτοιο μήκος, το οποίο δέχεται αξιόλογη αξονική θλίψη και εγκάρσια φορτία δημιουργώντας μεγάλες μετατοπίσεις. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι οι διαφορές που παρατηρούνται μεταξύ των Πινάκων 4,5 στις τιμές των μεγίστων μετατοπίσεων $(v_{top})_{max}$ προκύπτουν από το γεγονός ότι οι διαφορικές εξισώσεις των εγκάρσιων διευθύνσεων y, z είναι πεπλεγμένες και κατά συνέπεια δεν ισχύει η επαλληλία των φορτίσεων στη μη γραμμική ανάλυση. Αντιθέτως στη γραμμική ανάλυση τα αποτελέσματα ταυτίζονται αφού οι διαφορικές εξισώσεις είναι ασύζευκτες και άρα ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Όπως αποδεικνύεται από το προηγούμενο παράδειγμα, η απόκλιση των αποτελεσμάτων των μετατοπίσεων, είτε λόγω διατμητικής παραμόρφωσης είτε λόγω φαινομένων μη γραμμικής ανάλυσης είναι εμφανής.



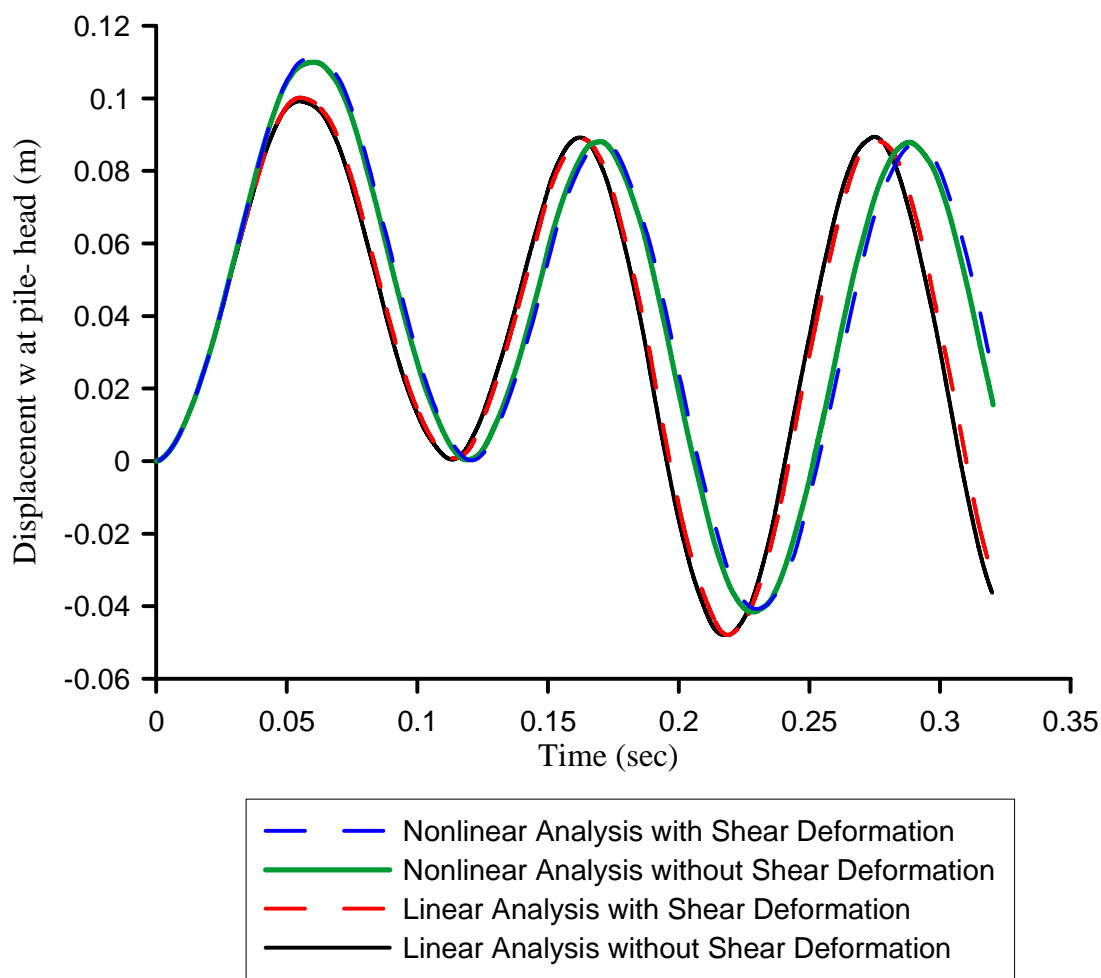
Σχήμα 14. Μετατόπιση v κατά μήκος του πασσάλου την χρονική στιγμή $t = 7.0 \times 10^{-2}$ της Εφαρμογής 3

Figure 14. Displacement v at time instant $t = 7.0 \times 10^{-2}$ along the pile of example 3

Πίνακας 5. Μέγιστες μετατοπίσεις της κεφαλής του πασσάλου $(v_{top})_{max}$, $(w_{top})_{max}$ και οι περίοδοι T_y, T_z (sec) του πρώτου κύκλου κίνησης της Εφαρμογής 3

Table 5. Maximum head displacements $(v_{top})_{max}$, $(w_{top})_{max}$ and periods T_y, T_z (sec) of the first cycle of the examined pile of example 3

	Χωρίς Διατμητικές Παραμορφώσεις		Με Διατμητικές Παραμορφώσεις	
	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση	Γραμμική Ανάλυση	Μη Γραμμική Ανάλυση
$(v_{top})_{max}$	0.2054	0.2320	0.2070	0.2353
$(w_{top})_{max}$	0.0992	0.1109	0.1002	0.1111
T_y	0.1105	0.1172	0.1111	0.1192
T_z	0.1133	0.1189	0.1143	0.1215



Σχήμα 15. Χρονοϊστορία της εγκάρσιας μετατόπισης w_{top} της κεφαλής του εξεταζόμενου πασσάλου της Εφαρμογής 3

Figure 15. Time history of the transverse displacement w_{top} of the head of the pile of example 3

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η μη γραμμική δυναμική ανάλυση δοκού - πασσάλου τυχαίας διατομής διπλής συμμετρίας, μερικώς εδραζόμενου επί μη γραμμικού εδάφους προσομοιωμένου με μη γραμμικά ελατήρια τύπου Winkler, υποβαλλόμενου σε μετρίως μεγάλες μετατοπίσεις και σε τυχούσες συνοριακές συνθήκες, λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης και περιστροφικής αδράνειας. Η δοκός υπόκειται σε συνδυασμένη δράση από τυχαίως κατανεμημένη ή συγκεντρωμένη εγκάρσια δυναμική φόρτιση και καμπτική ροπή κατά τις δυο διευθύνσεις καθώς και δυναμικό αξονικό φορτίο. Η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης. Το προτεινόμενο μαθηματικό προσομοίωμα συνυπολογίζει τα πεπλεγμένα φαινόμενα των καμπτικών και διατμητικών παραμορφώσεων κατά μήκος της δοκού καθώς και τις αναπτυσσόμενες διατμητικές δυνάμεις από το αξονικό φορτίο. Τα κυριότερα συμπεράσματα, τα οποία προκύπτουν από τη διερεύνηση αυτή, είναι :

- i. Το προτεινόμενο προσομοίωμα επιτρέπει τον υπολογισμό των διατμητικών συντελεστών και καταδεικνύει την επιρροή των διατμητικών φαινομένων που σε ορισμένες περιπτώσεις είναι σημαντική, αυξάνοντας τόσο τις εγκάρσιες μετατοπίσεις όσο και τις περιόδους του πρώτου κύκλου κίνησης της δοκού.
- ii. Μελετώντας τα αριθμητικά παραδείγματα όπως αναπτυχθήκαν στην προηγούμενη παράγραφο είναι πρόδηλη η σημασία της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στο σύνολο των περιπτώσεων. Αναλυτικότερα, σε περιπτώσεις όπου το αξονικό φορτίο είναι θλιπτικό η μη γραμμικότητα οδήγησε στην αύξηση των μετατοπίσεων και των περιόδων πρώτου κύκλου κίνησης με αξιοσημείωτες αποκλίσεις από τα αντίστοιχα μεγέθη της γραμμικής ανάλυσης. Αντίθετα σε περιπτώσεις όπου ο συνδυασμός εξωτερικού φορτίου και των συνθηκών στήριξης είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία εφελκυστικής αξονικής έντασης, τα αποτελέσματα που εξήχθησαν από την ανάλυση με σύγχρονη επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας έχουν μικρότερες τιμές από αυτά της κλασσικής (γραμμικής) ανάλυσης.
- iii. Ένας ακόμη τομέας στον οποίο εξήχθησαν αξιόλογα συμπεράσματα είναι η σημασία της σωστής προσομοίωσης του υποκείμενου ή περιβάλλοντος εδάφους. Στην παρούσα ερευνητική εργασία το έδαφος αντιμετωπίστηκε ως μη γραμμικό (δεν είναι αποδεκτή εφελκυστική τάση-tensionless) και προσομοιώθηκε από μη γραμμικά ελατήρια τύπου Winkler. Τα αριθμητικά παραδείγματα ανέδειξαν την εξάρτηση τόσο της περιοχής επαφής δοκού-εδάφους όσο και της δυναμικής απόκρισης της δοκού από την εδαφική δυσκαμψία.
- iv. Για να επιτευχθεί η ζητούμενη ακρίβεια απαιτείται μικρός αριθμός διακριτοποιημένων στοιχείων κατά μήκος της δοκού ενώ η πύκνωση του δικτύου οδηγεί σε μηδαμινές διαφορές των αποτελεσμάτων και έτσι χαρακτηρίζεται επουσιώδης.
- v. Το προτεινόμενο προσομοίωμα, όπως αποδείχθηκε από τα αριθμητικά παραδείγματα αλλά και από το θεωρητικό μέρος, λαμβάνει υπόψη τα φαινόμενα επιρροής (coupling effect) των δυο εγκάρσιων διευθύνσεων. Έτσι η ταλάντωση κατά z επηρεάζει την ταλάντωση κατά y και δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας στη μη γραμμική ανάλυση.

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος του ερευνητικού προγράμματος “DARE” (“Soil-Foundation-Structure Systems Beyond Conventional Seismic Failure Thresholds : Application to New or Existing Structures and Monuments”), το οποίο χρηματοδοτείται από την ΕΕ μέσω του 7ου Πλαισίου Στήριξης και του προγράμματος “Ideas”, Support for Frontier Research — Advanced Grant, και με αριθμό σύμβασης ERC-2008-AdG 228254-DARE.

Βιβλιογραφία

- ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300, USA.
- Calin, F. F., “Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 28, 469-476, 2009.
- Cowper, G.R., “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 33(2), 335-340, 1966.
- De Rosa, M.A., “Free Vibrations of Timoshenko Beams on Two-Parameter Elastic Foundation”, *Computers & Structures*, 57(1), 151-156, 1995.
- Friswell, M.I., Adhikari, S. and Lei, Y., “Vibration analysis of beams with non-local foundation using the finite element method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(11), 1365–1386, 2007.
- Hetenyi, M., “Beams and Plates on Elastic Foundations and Related Problems”, *Applied Mechanics Reviews*, 19, 95-102, 1966.

- Katsikadelis, J.T., "The Analog Equation Method. A Boundary-Only Integral Equation Method for Nonlinear Static and Dynamic Problems in General Bodies", *Theoretical and Applied Mechanics*, 27, 13-38, 2002.
- Lai, Y.C., Ting, B.Y., Lee, W.S. and Becker, W.R., "Dynamic response of beams on elastic foundation", *International Journal for Structural Engineering*, 118, 853-858, 1992.
- Lewandowski, R., "Nonlinear Free Vibrations of Multispan Beams on Elastic Supports", *Computers & Structures*, 32(2), 305-312, 1989.
- El-Mously, M., "Fundamental Frequencies of Timoshenko Beams Mounted on Pasternak Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, 228(2), 452-457, 1999.
- Rades, M., "Dynamic Analysis of an Inertial Foundation Model", *Int. J. Solids Structures*, 8, 1353-1372, 1972.
- Sapountzakis, E.J. and Dourakopoulos, J.A., "Nonlinear Dynamic Analysis of Timoshenko Beams by BEM. Part I: Theory and Numerical Implementation", *Nonlinear Dynamics*, 58(1-2), 295-306, 2009.
- Sapountzakis, E.J. and Dourakopoulos, J.A., "Nonlinear Dynamic Analysis of Timoshenko Beams by BEM. Part II: Applications and Validation", *Nonlinear Dynamics*, 58(1-2), 307-318, 2009.
- Sapountzakis, E.J. and Katsikadelis, J.T., "Elastic deformation of ribbed plates under static, transverse and inplane loading", *Computers and Structures*, 74, 571-581, 2000.
- Sapountzakis, E.J., "Dynamic Analysis of Composite Steel-Concrete Structures with Deformable Connection", *Proc. of the 20th International Conference "Steel Structures and Bridges 2003"*, Czech Republic, Prague, September 17-20, 2003.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G., "A BEM Solution to Transverse Shear Loading of Beams", *Computational Mechanics*, 36, 384-397, 2005.
- Stephen, N.G., "Timoshenko's Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Loading", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 47, 121-127, 1980.
- Thambiratnam, D. and Zhuge, Y., "Free vibration analysis of beams on elastic foundation", *Computer & Structures*, 60(6), 971-980, 1996.
- Timoshenko, S., Young, D.H. and Weaver, W., "Vibration problems in Engineering", fourth ed. Wiley, New York, 1974.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., "Theory of Elasticity", 3rd edn, McGraw-Hill, New York, 1984.
- Zhang, Y. Q., Lu Y., Wanga, S. L. and Liu, X., "Vibration and buckling of a double-beam system under compressive axial loading" *Journal of Sound and Vibration*, 318, 341-352, 2008.

Nonlinear Dynamic Analysis of Pile – Columns of Bridge Piers – Application in Valleybridges of Metsovo and in Metsovitikos River Bridge.

E. Sapountzakis, Associate Professor N.T.U.A.
Institute of Structural Analysis and Antiseismic Research N.T.U.A.
A. Kampitsis, Doctoral Student, Civil Engineer N.T.U.A.
Institute of Structural Analysis and Antiseismic Research N.T.U.A.
A. Koroneou, Civil Engineer N.T.U.A.

Abstract

In this paper, a boundary element method is developed for the nonlinear dynamic analysis of beam-columns of arbitrary doubly symmetric simply or multiply connected constant cross section, partially supported on tensionless Winkler foundation, undergoing moderate large deflections under general boundary conditions, taking into account the effects of shear deformation and rotary inertia. The beam-column is subjected to the combined action of arbitrarily distributed or concentrated transverse loading and bending moments in both directions as well as to axial loading. To account for shear deformations, the concept of shear deformation coefficients is used. Five boundary value problems are formulated with respect to the transverse displacements, to the axial displacement and to two stress functions and solved using the Analog Equation Method, a BEM based method. Application of the boundary element technique yields a nonlinear coupled system of equations of motion. The solution of this system is accomplished iteratively by employing the average acceleration method in combination with the modified Newton Raphson method. The evaluation of the shear deformation coefficients is accomplished from the aforementioned stress functions using only boundary integration. The proposed model takes into account the coupling effects of bending and shear deformations along the member as well as the shear forces along the span induced by the applied axial loading. The proposed model can be easily applied to the Valleybridges of Metsovo and in Metsovitikos River Bridge.